

# Lietuvos mokslo tarybos finansuojamo projekto „Solitoniniai sprendiniai stochastiniuose COVID-19 pandemijos modeliuose”, skirto parengti sprendimus dėl COVID-19 padarinių, rezultatai

Paraiškoje pagal darbo planą buvo numatyti penki uždaviniai. Aptarsime kaip sekėsi šiuos uždavinius įgyvendinti ir kokie buvo gauti rezultatai.

**#1. Apibrėžus solitoninių sprendinių architektūrą, tiesioginio balansavimo metodu nustatyti ar esantys COVID-19 pandemijos modeliai (aprašomi paprastųjų diferencialinių lygčių sistemomis) gali priimti šiuos solitoninius sprendinius.**

Atliekant projekte numatytus tyrimus priimama standartinė solitoninių sprendinių architektūra [1, 2]:

$$x(t) = \sigma \frac{\prod_{k=1}^n (\exp(\eta(t - t_0)) - x_k)}{\prod_{k=1}^n (\exp(\eta(t - t_0)) - t_k)}$$

(1)

čia  $n \in \mathbb{N}$  yra solitoninio sprendinio eilė,  $t_0, \sigma, \eta \in \mathbb{R}, x_k, t_k \in \mathbb{C}$ .

Šiuo metu mokslinėje literatūroje pristatomi, tiriami ir naudojami COVID-19 pandemijos modeliai pagrįdę remiasi SEIR (Susceptible – Exposed – Infectious – Recovered) modeliu [3, 4, 5, 6] ir daugybe šio modelio modifikacijų (SERS, SEIRV, t.t.). Bazinis SEIR modelis aprašomas keturių pirmos eilės paprastųjų diferencialinių lygčių sistema:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N}SI \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta}{N}SI - \sigma E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

(2)

čia  $N = S + E + I + R$  yra bendras populiacijos dydis,  $\beta$  yra parametras aprašantis infekcijos plitimą,  $\sigma$  yra parametras aprašantis inkubacijos laiką,  $\gamma$  – parametras aprašantis išgyjimo greitį. Galima pastebėti, kad netiesiškumus SEIR modelyje įveda multiplikatyviniai nariai pirmoje ir antroje sistemos lygtyse. Kitais žodžiais tariant, kai  $\beta = 0$ , SEIR modelis tampa keturių tiesinių diferencialinių lygčių sistema, o netiesiškumą į šią sistemą įneša multiplikatyviniai nariai ( $SI$ ).

Deja, SEIR modelis negali priimti net paprasčiausio solitono (kink-tipo solitono) kai solitoninio sprendinio eilė  $n = 1$ . Tiesioginio balansavimo metodas [7] reikalauja, kad sistemoje būtų daugiau laisvų parametru – kitaip netenkinamos netgi būtinos kink-tipo solitono egzistavimo sąlygos.

Multiplikatyviniai sąryšiai, paverčiantys SEIR modelio lygtis netiesinėmis diferencialinėmis lygtimis, plačiai naudojami įvairiuose konkurencijos modeliuose. Galima paminėti tokius modelius kaip prostatos vėžio vystymosi modelį [8], hepatito gydymo modelį [9].

Pažymėtina, kad mūsų tyrimų grupė yra įrodžiusi, kad šiuose modeliuose su multiplikatyviniais nariais egzistuoja įvairūs solitoniniai sprendiniai [10, 11]. Pagrindinis šių modelių skirtumas nuo SEIR modelio yra tas, kad užnulinus multiplikatyvinius narius, liekanti diferencialinių lygčių sistema yra netiesinė. Kaip taisyklė, tas „bazinės“ nesusietąsias diferencialines lygtis sudaro Riccati tipo lygtys su kvadratinu netiesiškumu. Tai galima paaiškinti pirmiausia tuo faktu, kad netiesinės Riccati lygtys susietos multiplikatyviniais sąryšiais yra žymiai „turingesnės“ nei SEIR modelio lygtys ir įgalina aprašyti sudėtingesnius pereinamuosius procesus. Tipinis pavyzdys – mūsų pastebėti trečios eilės solitonai hepatito gydymo modelyje sąlygoja tai, kad pradėjus gydymą paciento situacija iš pradžių gali pablogėti, o gerėjimo procesas pradės vykti tik vėliau po pradinės krizės [11]. Joks SEIR modelis tokių efektų aprašyti negali.

Dar daugiau, ką tik pasirodė ir nauji COVID-19 modeliai, pagrįsti ne SEIR tiesinėmis lygtimis su susietomis multiplikatyviniais nariais, o netiesinėmis Riccati lygtimis, susietomis multiplikatyviniais nariais [12]:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = pV \left(1 - \frac{V}{K}\right) - c_T VT - cV \\ \frac{dT}{dt} = s_T + rTG(V) - \delta_T T \end{cases}$$

(3)

čia  $T$  yra  $T$  ląstelių skaičius,  $V$  yra viruso ląstelių koncentracija  $\log_{10}$  vnt/ml (kitų parametru reikšmės detalai aptartos [12]). Reikia pažymėti, kad šis modelis aprašo kaip COVID-19 virusai sukelia ligą vieno žmogaus organizme [12].

Kaip ką tik paminėta, modelį (3) galima interpretuoti kaip dviejų Riccati lygčių, susietų multiplikatyviniais nariais, sistemą:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \lambda xy \\ \frac{dy}{dt} = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \mu xy \end{cases}$$

(4)

čia  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, \lambda, \mu$  yra realios konstantos,  $a_2, b_2 \neq 0$ . Mūsų grupė pastaraisiais metais įrodė, kad šioje sistemoje gali egzistuoti antros eilės solitoniniai sprendiniai [13].

Natūralus klausimas, kaip lokalų COVID-19 modelį [12] būtų galima išplėsti erdvėje. Įdomus kiekviename atskirame mazge konkuruojančių sistemų apjungimo modelis pastaraisiais metais yra pasiūlytas darbe [14]. Reikia pažymėti, kad [14] darbe pasiūlytas modelis, kai konkurencinės Lotka-Volterra sistemos jungiamos difuziniais sąryšiais grafo viršūnėse. Dviejų viršūnių ir vienos briaunos atveju, [14] modelis aprašo tokią lygčių sistemą:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \lambda_1 x_1 y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = b_{11}y_1 + \mu_1 x_1 y_1 + \beta_1 (y_2 - y_1) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{12}x_2 + \lambda_2 x_2 y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = b_{12}y_2 + \mu_2 x_2 y_2 + \beta_2 (y_1 - y_2) \end{array} \right.$$

(5)

Šiame modelyje [14], nariai  $\beta_1(y_2 - y_1)$  ir  $\beta_2(y_1 - y_2)$  realizuoja difuzinio tipo sinchronizaciją tarp pirmojo ir antrojo mazgo pagal antrąsias coordinates. Reikia pastebėti, kad atmetus difuzinius ir multiplikatyvinius narius, [14] modelio sistema virstų keturiomis nesusietomis tiesinėmis diferencialinėmis lygtimis.

Taigi, natūralus [14] sistemos išplėtimas yra perėjimas prie Riccati lygčių. Paprasčiausiu atveju (dviejų viršūnių ir vienos briaunos atveju), modelio lygtys įgautų štai tokį pavidalą:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{01} + a_{11}x_1 + a_{21}x_1^2 + \lambda_1 x_1 y_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = b_{01} + b_{11}y_1 + b_{21}y_1^2 + \mu_1 x_1 y_1 + \beta_1 (y_2 - y_1) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{02} + a_{12}x_2 + a_{22}x_2^2 + \lambda_2 x_2 y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = b_{02} + b_{12}y_2 + b_{22}y_2^2 + \mu_2 x_2 y_2 + \beta_2 (y_1 - y_2) \end{array} \right.$$

(6)

Beje, panašus modelis (kai difuzinis ryšys yra vienkryptis) naudojamas metastazių plitimo modelio aprašymui [15].

Taigi, mūsų siūlomą COVID-19 modelį galima vadinti meta-konkurenciniu modeliu grafo viršūnėse, kai sąryšiai briaunose realizuojami difuzinių sąryšių pagalba. Detalią diskusiją apie tokio modelio prasmę, svarbą ir išvedimo logiką galima rasti mūsų straipsnio [16] pirmojoje dalyje.

Kalbant apie solitonų egzistavimo būtinas ir pakankamas sąlygas meta konkurenciniame modelyje grafo viršūnėse su difuziniais sąryšiais, pirmiausia reikia aptarti kelis svarbius aspektus.

Gerai žinoma, kad vienos izoliuotos Riccati lygties sprendinys yra pirmos eilės solitoninis sprendinys (kink-tipo solitonas) [17]. Kaip minėta prieš tai, dviejų Riccati lygčių, susietų multiplikatyviniais sąryšiais, sistema gali turėti antros eilės solitoninius sprendinius (būtinos ir pakankamos dark-bright solitonų egzistavimo sąlygos išvestos [13]).

Šioje vietoje iškyla sudėtingas matematinis uždavinys – nustatyti ar meta-konkurencinis modelis grafo viršūnėse gali priimti solitoninius sprendinius. Klausimų šioje vietoje daug. Pirmiausia reikia nustatyti būtinas ir pakankamas solitoninių sprendinių egzistavimo sąlygas sistemos parametrų ir pradinių sąlygų erdvėje. Toliau, būtina nustatyti maksimalią egzistuojančio solitono eilę duotame modelyje. Visi šie klausimai – antrojo Projekto uždavinio objektas.

## **#2. Atvirkštinio balansavimo metodu rasti sąsajas tarp COVID-19 modelio parametrų ir solitoninių sprendinių parametrų, ir tuo pačiu išvesti būtinas ir pakankamas tokių sprendinių egzistavimo sąlygas.**

Naujų solitoninių sprendinių paieškos uždaviniai netiesinių sistemų modeliuose, aprašomuose diferencialinėmis lygtimis, turi ilgą, turtingą, ir netgi kartais kontraversišką istoriją. Turbūt daugiausiai dėmesio (ir kritikos) yra sulaukęs taip vadinamas Exp-funkcijų metodas [18], nors panašių metodų ir algoritmų prikurta daugybė ( $G'/G$  skleidinio metodas [19], tanh-funkcijų metodas [20], t.t.).

Visų šių metodų principas panašus. Jei sistemos modeliai užrašomi dalinių išvestinių diferencialinėmis lygtimis, tai pirmasis žingsnis yra koordinačių sistemos keitimas į bėgančios bangos koordinačių sistemą (kai bangos sklidimo greitis irgi yra nežinomas kintamasis). Po elementarių pertvarkymų, dalinių išvestinių lygtys virsta paprastųjų išvestinių lygtimis (pirmasis etapas COVID-19 modeliuose neaktualus, nes visi pastaruoju metu naudojami modeliai užrašomi paprastųjų išvestinių lygčių sistemų pavidalu). Antrasis šių metodų žingsnis – sprendinių architektūros (šeimos) fiksavimas. Trečiasis žingsnis – tai simbolių pertvarkymų paketų panaudojimas statant duotas architektūros sprendinius į modelio diferencialines lygtis, sulyginant sprendinių kintamųjų eiles ir laipsnius pagal modelio netiesinius ir diferencialinius narius. Šis žingsnis paprastai vadinamas tiesioginio balansavimo (direct balancing) procedūra. Galiausiai, tiesioginio balansavimo būdu fiksavus konkrečią sprendinio formą, ir taipogi naudojant simbolių pertvarkymų paketus, nežinomi sprendinio parametrai išreiškiami per modelių lygčių parametrų sąsajas.

Mūsų grupė yra pademonstravusi tiesioginio balansavimo metodų trūkumus [21,22]. Pagrindinis tiesioginio balansavimo metodų trūkumas yra tas, kad naudojantis šiuo metodu neįmanoma išvesti pakankamų gaunamų sprendinių egzistavimo sąlygų modelio parametrų ir sprendinio pradinių sąlygų erdvėje. Dar daugiau, kai kuriais atvejais, tiesioginio balansavimo metodu gaunami sprendiniai gali iš viso niekada netenkinti modelio lygčių [23].

Šias problemas mūsų grupė yra išsprendusi pristatydama atvirkštinio balansavimo metodą solitoninių sprendinių paieškai [24]. Pažymėtina, kad atvirkštinio balansavimo metodas reikalauja ypač didelių simbolių skaičiavimų resursų. Galima paminėti, kad atvirkštinio balansavimo metodas tiesiogiai yra susijęs su modelio diferencialinių lygčių operatoriniu skaičiavimo metodu. Mūsų grupėje tokius skaičiavimus atlikinėjame su stacionariais kompiuteriais, kurių kiekvieno vien tik operatyvinė atmintis siekia 256 GB.

Kaip minėjome prieš tai, esamę įrodę kad dviejų Riccati lygčių sistemoje su multiplikatyviniais sąryšiais gali egzistuoti antros eilės solitonai [13]. Antrajame Projekto uždavinyje būtent ir iškelta tikslas atvirkštinio balansavimo būdu išvesti būtinas ir pakankamas solitonų egzistavimo sąlygas COVID-19 modeliuose. Pirmojo Projekto uždavinio vykdymo rezultate fokusuojamės į sistemą, aprašomą lygtimis (6). Matematinio požiūriu, ši užduotis ženkliai sudėtingesnė už solitonų paieškos uždavinį [13] sistemoje.

Šiems klausimams spręsti skirtas pirmasis mūsų straipsnis, priduetas į žurnalo *Advances in Difference Equations* redakciją [25]. Kadangi straipsnio apimtis yra 22 puslapiai, teksto ataskaitoje neperrašinėsimė, o paprašysime skaitytojus peržvelgti straipsnio tekstą, ir pateiksime pagrindines išvadas.

Taigi, atliktų tyrimų rezultate įrodyta, kad sistemoje (6) gali egzistuoti bet kokios eilės solitonai – tačiau solitonų su nesutampančiomis charakteringomis reikšmėmis didžiausia galima eilė yra trečia (t.y. maksimalus lokalių solitono ekstremumų skaičius yra trys). Kitais žodžiais tariant, erdvinės koordinatės įvedimas į COVID-19 modelį [12], leidžia padidinti solitono eilę nuo antros iki trečios. O modelio išplėtimas grafo viršūnėse leidžia sukonstruoti solitoninius sprendinius su bet koku norimu lokalių ekstremumų skaičiumi. Tai svarbus matematinis rezultatas, o siekiant šio rezultato praplėsta ir solitoninių sprendinių konstravimo teorija [16].

### **#3. Sukurti COVID-19 pandemijos modelių stochastizacijos metodikas pagal Ito schemą, kuri leistų užtikrinti stochastinių solitoninių sprendinių reikšmių kitimo intervalų garantuotus apribojimus.**

Šiuo metu yra sukurta visa eilė stochastinių COVID-19 pandemijos modelių. Kaip taisyklė, visi šie modeliai remiasi SEIR modelio stochastizacija. Tipinis pavyzdys – stochastinis SEIR modelis pritaikytas antrosios pandemijos bangos modeliavimui [25]. Tikslumo dėlei, reikėtų paminėti kad ir [25] modelyje, ir daugelyje kitų stochastinių SEIR modelių, naudojama modelio parametrų randomizacija (t.y. prie modelio parametrų tiesiogiai, ar per diferencialinius sąryšius, pridedami atsitiktiniai dydžiai pasiskirstę pagal Gauso normalinį arba lognormalinį dėsnius. Kitais žodžiais tariant, nagrinėjami martingalai. Pavyzdžiui, straipsnyje [25] stochastinis SEIR modelis integruojamas nuo tų pačių pradinių sąlygų 30 kartų – ir tuomet nagrinėjama suvidurkinta trajektorija (Šiame straipsnyje martingalų skirstinių problemos nenagrinėjamos).

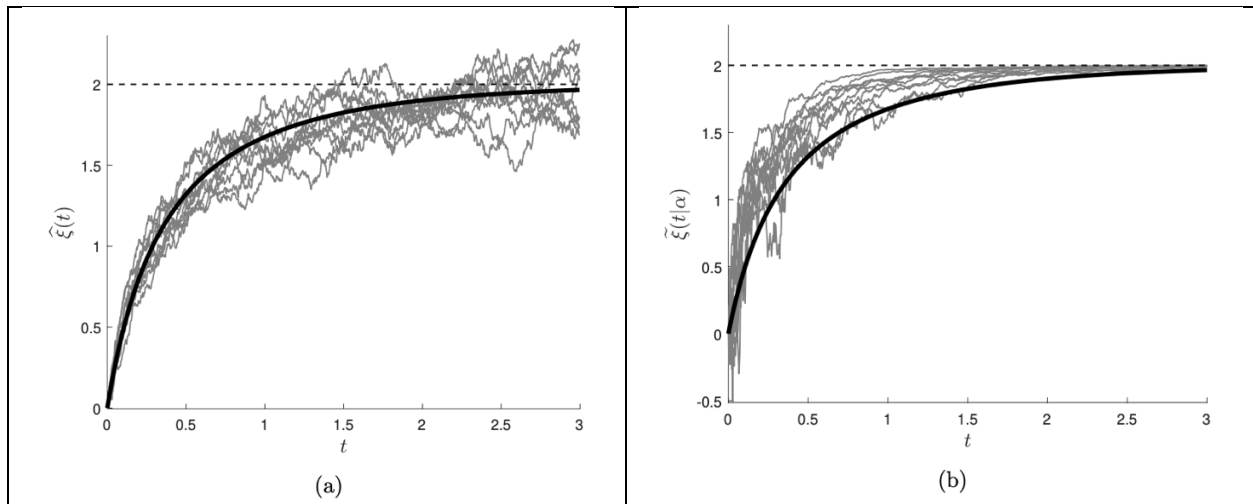
Šioje vietoje, reikia pažymėti pagrindines problemas, susijusias su tokia tiesmukiška modelių stochastizacija (tikslėnis terminas būtų randomizacija). Pirmoji problema yra ta, kad kuo toliau einama nuo pradinių sąlygų, tuo nuokryptai nuo nestochastizuoto sprendinio tampa didesni (atskiros trajektorijos vis labiau išsibarsto ir bet koks prognozavimas tampa smarkiai komplikotas). Antroji problema susijusi su faktu, kad atskira trajektorija gali išeiti už tam tikrų ribų (pavyzdžiui, užsikrėtusiųjų žmonių skaičius gali tapti neigiamas). Šių problemų sprendimui kaip tik ir buvo skirtas trečiasis projekto uždavinys – tai yra COVID-19 pandemijos modelių stochastizacijos metodikų kūrimas pagal Ito schemą.

Sprendžiant šį uždavinį, pirmiausiai susitvarkyta su atskiros modelio netiesinės diferencialinės lygties solitoninių sprendinių stochastizavimu (ne randomizavimu) pagal Ito schemą. Pažymėtina, kad čia iškyla visa eilė svarbių ir gana sudėtingų teorinių problemų. Vien šių klausimų pagrindu paruoštas straipsnis [26] ir pateiktas žurnalo *Open Mathematics* redakcijai. Pateiksime trumpą spręstų problemų apžvalgą.

Pirmiausia, Ito stochastizacijos schema įvesta į apibendrintu diferencialiniu operatoriumi generuojamą diferencialinės lygties analitinį sprendinį. Tuomet, atvirkštinio balansavimo metodu konstruojami stochastinių diferencialinių lygčių solitoninių sprendinių šeima, įrodomos būtinų ir pakankamų sprendinio egzistavimo sąlygų teoremos. Galiausiai, sukonstruojama Riccati tipo

lygčių stochastizacijos schema ir solitoninių stochastinių sprendinių analitinės išraiškos. Reikia pažymėti, kad straipsnyje iš viso yra 87 sunumeruotos formulės. Skaitytojo maloniai prašytume detalius matematinius rezultatus peržvelgti pačiame straipsnio tekste.

Visgi, norime akcentuoti svarbų tokios stochastizacijos praktinį rezultatą. Stochastinių diferencialinių lygčių solitoniniai sprendiniai visuomet bus apriboti užduotuose reikšmių kitimo intervaluose. Kaip pavyzdį pateiksime grafines iliustracijas (Pav. 1) iš mūsų antrojo straipsnio.



Pav. 1

Dalyje (a) matome solitoninio sprendinio prisistotinimo procesą. Kai laikas  $t$  artėja į plus begalybę, solitoninis sprendinys (pavaizduotas stora juoda linija) artėja prie dviejų. Stochastinės diferencialinės lygties pradinės sąlygos dalyje (a) formuluojamos taške  $t = 0$ . Matome, kad bėgant laikui atskirų stochastinių sprendinių pluoštas plečiasi, ir nėra jokių būdų užtikrinti (apart dirbtinai nupjaunant sprendinių reikšmes), kad konkreti stochastinė solitoninio sprendinio realizacija neviršytų viršutinės ribinės reikšmės lygios 2. Atliekant stochastizaciją pagal mūsų pristatytą schemą, garantuojame jog bet kurios atskirosios stochastinio solitoninio sprendinio realizacijos skaitinės reikšmės visuomet (analitiškai) bus apribotos viršutiniu rėžiumi lygiu 2 (dalis b).

Taigi, sukurta solitoninių sprendinių stochastizacijos metodika pagal Ito schemą leidžia užtikrinti stochastinių solitoninių sprendinių reikšmių kitimo intervalų garantuotus apribojimus.

#### **#4. Atlikti COVID-19 pandemijos modelių atraktorių analizę, fazines stabilumo diagramų, bei solitoniniais sprendiniais aprašomų separatrišių analizę.**

Kaip minėta Projekto paraiškoje, solitoniniai sprendiniai dinaminėse sistemose paprastai vaidina separatrišių vaidmenį. Kitais žodžiais tariant, sprendiniai, kurių pradinės sąlygos yra skirtingose separatrišės pusėse, konverguoja į skirtingus atraktorius. Tokiu atveju, galima sukonstruoti pereinamosios sprendinių dinamikos valdymo metodus, paremtus diskretiniu(iais) impulsu(ais).

Kaip tipinį pavyzdį, iliustruojantį tokio solitono egzistavimą ir sprendinių valdymą, pateiksime dentritinio neurono valdymo modelio pavyzdį 2016 metais publikuotą straipsnyje [27].

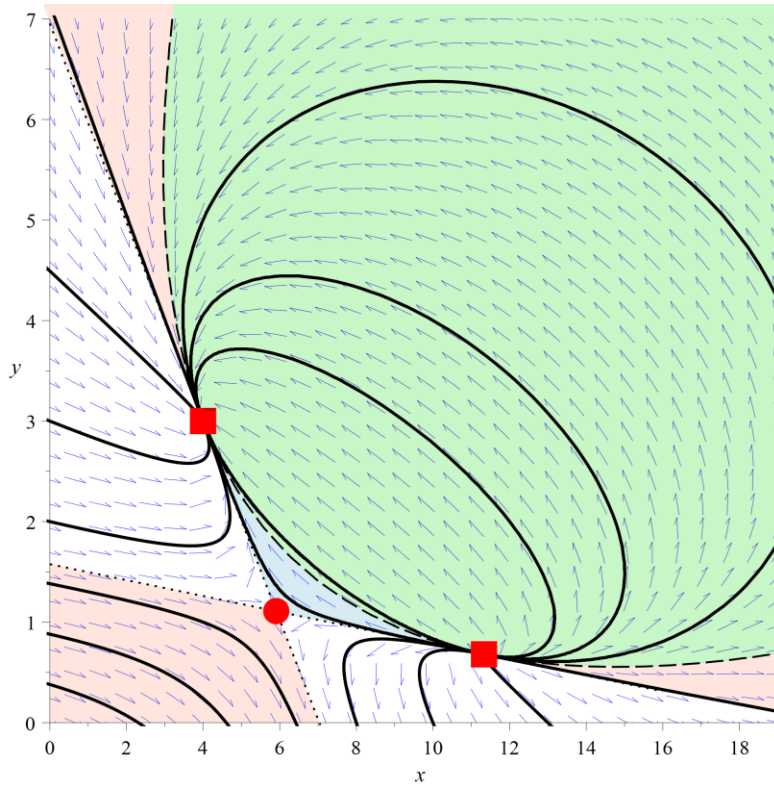
Paminėsime, kad ši valdymo schema veikia tuomet kai egzistuoja du konkuruojantys dendritinio neurono atraktoriai: stabilus židiny (atitinkantis tylią neurono būseną) ir ribinis ciklas (atitinkantis šaudančio neurono būseną). Šioje sistemoje solitoniniai sprendiniai gimsta balno taškų aplinkoje ir atlieka separatrišių vaidmenį tarp konkuruojančių atraktorių. Nedidelis impulsas gali permesti pereinamąjį procesą iš šaudančio režimo į tylųjį režimą. Reikia pažymėti, kad tyliajame režime neurono išlaikymui nereikės jokio papildomo žadinimo ar maitinimo grįžtamojo ryšio pagalba.

Šiame projekte nagrinėjame COVID-19 pandemijos sklidimui ir sukeltų susirgimų skaičiui aprašyti naudosime lygčių sistemą, kurios supaprastinta versija pateikta formulėse (6). Lygčių sistema (6) aprašo būtent paprasčiausią grafo atvejį, kurį sudaro du mazgai ir viena briauna. Be abejo, pirmiausia svarbu įsitikinti, ar kiekvienoje grafo viršūnėje esančio konkurencinio modelio (aprašomo dviejų susietų Riccati lygčių su multiplikatyviniais sąryšiais) solitoniniai sprendiniai atlieka separatrišių vaidmenį. Čia galime paminėti tokį atvejį, kai solitoniniai sprendiniai Hodgkin-Huxley neurono modelyje kai kuriais atvejais gali pažeisti simetriją ir netiksliai aprašyti separatrišes [28].

Vykdam šį uždavinį, įrodyta, kad COVID-19 modelyje [12], tuo pačiu ir (6) sistemoje ir jos apibendrinimuose sudėtingesniuose grafuose, solitoniniai sprendiniai ne tik egzistuoja (išvestos būtinos ir pakankamos jų egzistavimo sąlygos), bet ir atlieka separatrišių vaidmenį.

Pirmiausia paminėsime, kad būtinos ir pakankamos sąlygos, kada solitoniniai sprendiniai (4) sistemoje atlieka separatrišių vaidmenį, yra išvestos darbe [13]. Šio projekto rėmuose, būtinos ir pakankamos sąlygos, kada solitoniniai sprendiniai (6) sistema aprašomo grafo mazguose atlieka separatrišių vaidmenį, yra išvestos [16] straipsnyje.

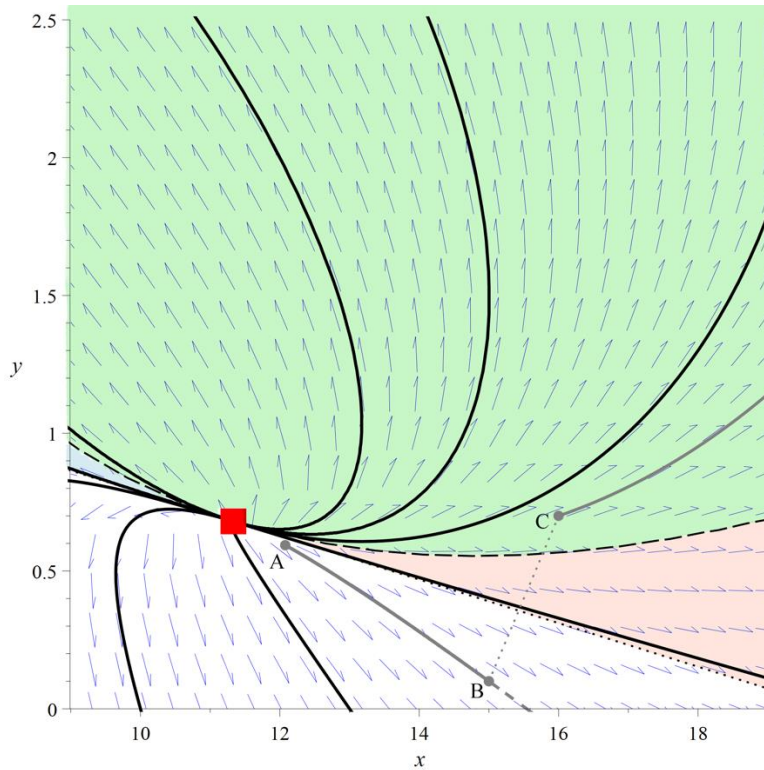
Pademonstruosime solitoninių sprendinių išsidėstymą fazinėje erdvėje. Nagrinėkime tokią lygčių sistemą grafo viršūnėje, kai  $a_0 = \frac{136}{11}$ ;  $a_1 = -\frac{828}{319}$ ;  $a_2 = \frac{29}{187}$ ;  $b_0 = -\frac{51}{29}$ ;  $b_1 = \frac{345}{319}$ ;  $b_2 = -\frac{550}{1479}$ ;  $\lambda = -\frac{550}{1479}$ ;  $\mu = \frac{29}{187}$ . Šios sistemos fazinė plokštuma pavaizduota Pav. 2.



Pav. 2. COVID-19 modelio vienoje grafo viršūnėje fazinė diagrama. Raudonas skritulys žymi balno tašką  $\left(\frac{136}{23}, \frac{51}{46}\right)$ ; raudoni kvadratai – stabilų mazgą  $(4,3)$  ir nestabilų mazgą  $\left(\frac{34}{3}, \frac{17}{25}\right)$ . Juodos linijos žymi sprendinių trajektorijas. Taškuotos juodos tiesės žymi balno taško stabilų ir nestabilų daugdaras, punktyrinė linija – antros eilės solitoną, kuri yra separatrix tarp sprendinių su trūkio taškais (katastrofomis) ir be trūkio taškų. Žaliai ir mėlynai nuspaltvintose srityse sprendinių trajektorijos atitinka netrūkius sprendinius; nuspaltvintose srityse – sprendinius su vienu trūkio tašku; rausvai nuspaltvintoje srityje – sprendinius su dviem trūkio taškais. Visos sprendinių trajektorijos yra antros eilės solitonai: žalioje srityje – solitonai be trūkių; kitose – solitonai su vienu arab dviem trūkio taškais.

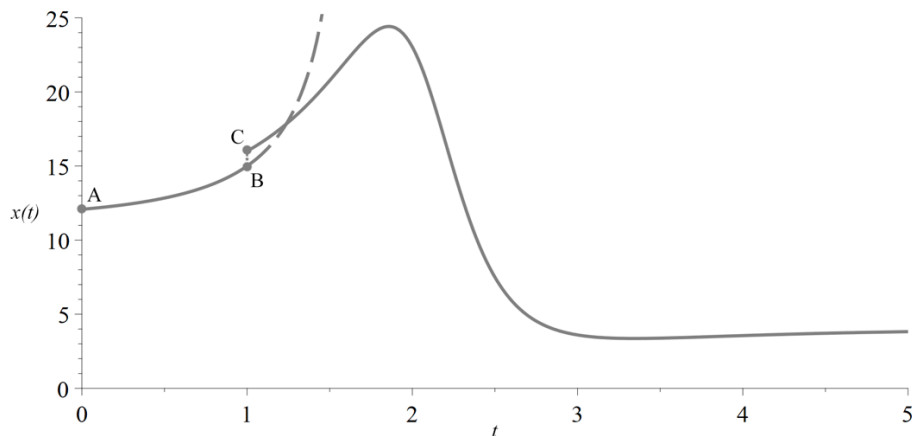
Pademonstruosime kaip vieno impulso pagalba suvaldyti užsikrėtusiųjų žmonių skaičiaus eksponentinį augimą (Pav. 3).





Pav. 3. Pilka linija pažymėta trajektorija pradeda evoliuciją taške  $A = (12.1, 0.6)$ . Kai trajektorija pasiekia tašką  $B = (12.45, 0.54)$ , duodamas impulsas: trajektorija taškuota pilka linija pervedama į kitą režimą ir toliau tęsia evoliuciją nuo taško  $C_1 = (13.26, 0.6)$  ir pasiekia stabilų pusiausvyros tašką. Jeigu nebūtų įvykdytas impulsas, sprendinys toliau evoliucionuotų pagal punktyrinę liniją pažymėtą trajektoriją.

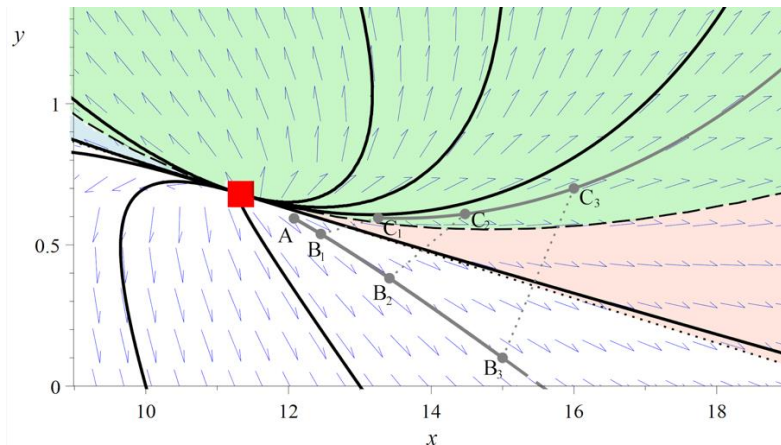
Atvaizduokime paveiklę 3 pavaizduotus pereinamuosius procesus laiko ašyje (Pav. 4).



Pav. 4. Eksponentinio sergančiųjų skaičiaus didėjimo suvaldymas vieno impulso pagalba. Sprendinio reikšmė taške  $t = 0$  atitinka tašką  $A$  paveiksle 3. Laiko momentu  $t = 0.3$  duodamas impulsas, ir trajektorija pervedama iš taško  $B$  į tašką  $C$ . Punktyrinė linija pavaizduota sprendinio trajektorija, jeigu nebūtų įvykdytas šuolis laiko momentu  $t = 0.3$ .

Svarbu pažymėti, kad reikia žinoti kuriuo momentu ir kokio dydžio impulsą reikia suteikti sistemai tam, kad ji pereitų į kitą evoliucijos režimą. Kitaip žodžiais tariant, reikia kirsti separatrisę, kuri žymi skirtingų atraktorių pritraukimo sritis. Šį impulsą galima interpretuoti kaip trumpą, bet labai griežtą karantiną.

Būtent impulso momentas yra labai svarbus sistemos valdymo aspektas. Paveikslas 5 iliustruoja kaip impulso dydis, reikalingas sistemos perėjimui į kitą evoliucijos režimą, priklauso nuo impulso suteikimo momento.



Pav. 5. Kuo labiau uždelsiame, tuo didesnis impulsas reikalingas tam, kad sistema peršoktų per separatrisę. Kai trajektorija pasiekia taškus  $B_1 = (12.45, 0.54)$ ;  $B_2 = (13.42, 0.48)$ ;  $B_3 = (15, 0.1)$ , duodamas impulsas: trajektorija taškuota pilka linija pervedama į kitą režimą ir toliau tęsia evoliuciją nuo atitinkamų taškų  $C_1 = (13.26, 0.6)$ ,  $C_2 = (14.47, 0.61)$ ,  $C_3 = (16, 0.7)$  ir pasiekia stabilų pusiausvyros tašką. Jeigu nebūtų įvykdytas impulsas, sprendinys toliau evoliucionuotų pagal punktyrinę linija pažymėtą trajektoriją, žyminčią eksponentinį susirgimų augimą.

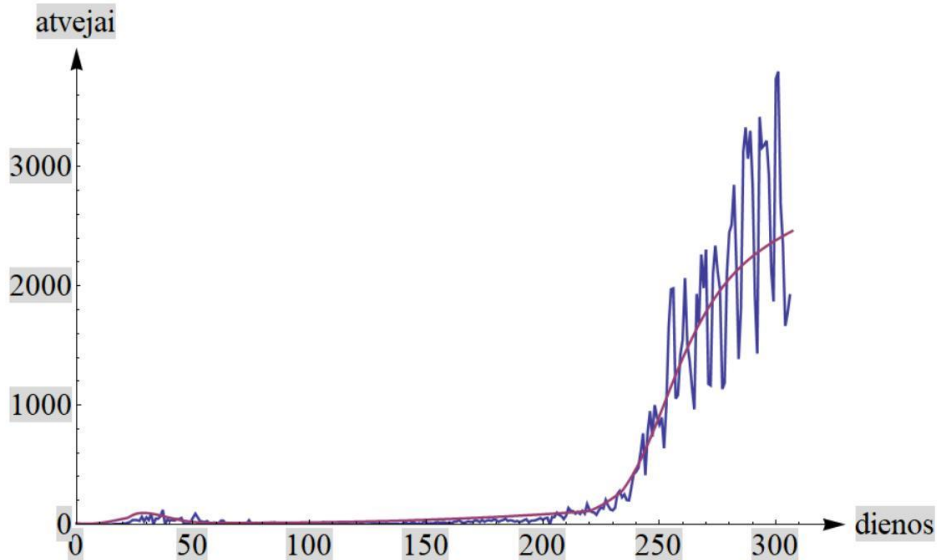
##### **#5. Adaptuoti stochastizuotus COVID-19 pandemijos modelius Lietuvos situacijai, išskirti Lietuvos situaciją aprašančius solitoninius sprendinius, pateikti Lietuvos COVID-19 pandemijos atraktorių analizę ir fazines stabilumo diagramas, pasiūlyti galimus sprendimus solitoninių sprendinių evoliucijos valdymui.**

Kaip matome iš šio projekto vykdymo eigos, COVID-19 pandemijos sklidimui ir sukeltų susirgimų skaičiui aprašyti naudosime lygčių sistemą, kurios supaprastinta versija pateikta formulėse (6). Lygčių sistema (6) aprašo būtent paprasčiausią grafo atvejį, kurį sudaro du mazgai ir viena briauna.

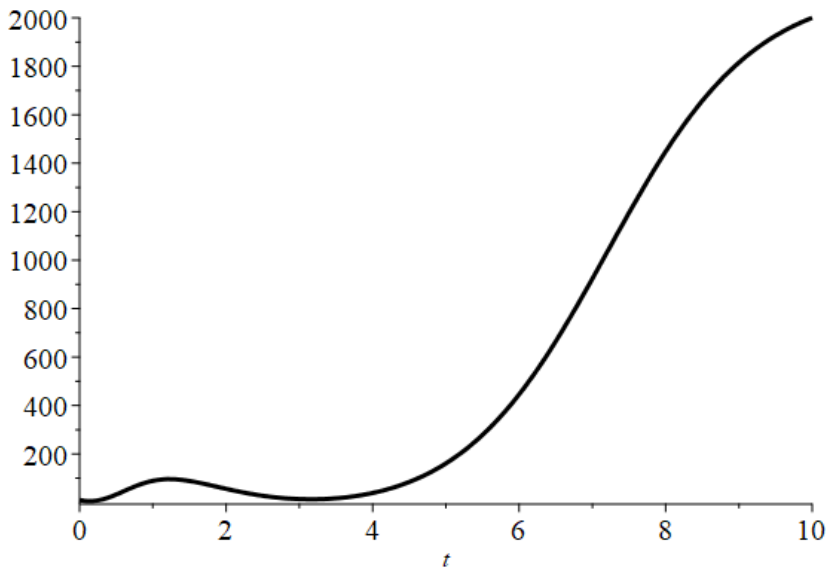
Natūraliai kyla klausimas apie tai, kokio sudėtingumo grafą reiktų nagrinėti, aprašant COVID-19 susirgimų statistiką Lietuvoje. Norint atsakyti į šį klausimą, pirmiausia reikia įvertinti kokio sudėtingumo solitoniniai sprendiniai galėtų aproksimuoti esančius statistinius duomenis. Reikia atkreipti dėmesį į faktą, kad Lietuvoje stebime „dviejų bangų“ susirgimų dinamiką. Ypač svarbu atkreipti dėmesį į faktą, kad antrosios bangos metu susirgimų skaičius yra nepalyginamai didesnis nei pirmosios bangos metu. Dar daugiau, keliame uždavinį ne lokaliai prognozuoti susirgimų skaičių kelioms dienoms į priekį, o sukonstruoti solitoninį sprendinį, kuris atitiktų susirgimų

dinamiką globalioje srityje. Kitais žodžiais tariant, konstruojame solitoną, kuris aprašo ir pirmąją, ir antrąją bangas, ir kuris potencialiai galėtų aprašyti ir trečiąją susirgimų bangą.

Lietuvos COVID-19 susirgimų statistiniai duomenys (LTU covid-19) iš šio oficialaus duomenų šaltinio: <https://ourworldindata.org/coronavirus-source-data>. Gautas aproksimuojantis solitonas ir jo analitinė išraiška pateikta paveiksluose 6 ir 7.



Pav. 6. COVID-19 susirgimų statistika Lietuvoje nuo pandemijos pradžios (mėlyna linija) ir aproksimuojantis solitoninis sprendinys (raudona linija).



$$fnLtu(t) = -375 + \frac{2500(20 + 6e^{(t-4/5)} - 2e^{2(t-4/5)} + 130e^{3(t-4/5)} + 75e^{4(t-4/5)} + e^{5(t-4/5)})}{2 + 400e^{(t-4/5)} + 85e^{2(t-4/5)} + 200e^{3(t-4/5)} + 600e^{4(t-4/5)} + e^{5(t-4/5)}}$$

Pav. 7. COVID-19 susirgimus Lietuvoje aproksimuojantis solitoninis sprendinys ir jo analitinė išraiška (bematėje koordinatinių sistemoje).

Pažymėtina, kad pav. 7 pateiktas solitonas yra penktos eilės solitonas, ir kad sistemoje (6) esančių laisvų parametru skaičius neleidžia tokio sudėtingumo solitonui būti šios sistemos sprendiniui. Kaip minėta prieš tai, modelio kompleksiskumą galima plėsti didinant grafo viršūnių skaičių. Lieka atviras klausimas apie tai, koks minimalus grafo viršūnių skaičius leistų priimti šį penktos eilės solitoną.

Kitais žodžiais tariant, tenka nagrinėti štai tokį uždavinį:

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = a_{0k} + a_{1k}x_k + a_{2k}x_k^2 + \lambda_k x_k y_k \\ \frac{dy_k}{dt} = b_{0k} + b_{1k}y_k + b_{2k}y_k^2 + \mu_k x_k y_k + \sum_{l=1; l \neq k}^n \beta_{kl}(y_l - y_k) \end{cases}$$

(7)

čia  $k = 3, 4, \dots, n$ ;  $n$  yra grafo viršūnių skaičius;  $a_{0k}, a_{1k}, a_{2k}, b_{0k}, b_{1k}, b_{2k}, \lambda_k, \mu_k, \beta_{kl} \in \mathbb{R}$  yra nagrinėjamos sistemos parametrai. Pažymėtina, kad tiriamas solitonų egzistavimas pilname grafe. Solitoninių sprendinių egzistavimas atsitiktiniuose, orientuotuose grafuose išeina iš šio Projekto ribų. Natūralu, kad tyrimą pradėdame nuo trijų viršūnių ( $n = 3$ ). Šiuo atveju turime 24 parametrus nusakančius sistemą (7).

Penktosios eilės solitoninius sprendinius galima išreikšti tokia forma:

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \sigma_{1k} \frac{X_k(\exp(\eta(t-c)))}{T(\exp(\eta(t-c)))} \\ y_k(t) &= \sigma_{2k} \frac{Y_k(\exp(\eta(t-c)))}{T(\exp(\eta(t-c)))} \end{aligned}$$

(8)

čia  $X_k(z), Y_k(z)$ , ir  $T(z)$  yra penktos eilės daugianariai  $z$  atžvilgiu.

Remiantis straipsnyje [16] pateiktais teoremų įrodymais, matome, kad penktos eilės solitoninio sprendinio egzistavimui pakanka grafo su trejomis viršūnėmis. Kitais žodžiais tariant, COVID-19 susirgimų dinamiką Lietuvoje (pirmąją ir antrąją susirgimų bangas) gali aprašyti meta konkurencinis modelis trejose grafo viršūnėse, kai kiekvienoje viršūnėje multiplikatyviniais narių pavidaly konkuruoja Riccati netiesinių lygčių poros, o tarp viršūnių briaunas atstovauja difuziniai sąryšio nariai. Pažymėtina, kad toks COVID-19 pandemijos modelis pristatytas pirmą kartą pasaulyje. Beje, šie rezultatai viršija tikslus, numatytus Projekto paraiškoje. Buvo planuojama ieškoti solitoninių sprendinių dabar naudojamuose modeliuose. Deja, kaip minėta anksčiau, kadangi SEIR tipo modeliuose solitoninių sprendinių nėra, teko kurti ir adaptuoti naujus modelius.

Straipsnyje [16] pateiktos būtinos sąlygos kada tarp solitoninių funkcijų parametru ir modelio sprendinio parametru egzistuoja atitikties, leidžianti toms funkcijoms tapti modelių sprendiniais. Šios sąlygos gana gremėzdiškos, ir skaitytojams rekomenduojame peržvelgti mūsų straipsnį [16]. Svarbu paminėti, kad būtinas ir pakankamas solitoninių sprendinių egzistavimo sąlygas išvedame

atvirktinio balansavimo metodu (tiesioginio balansavimo metodu toks uždavinys iš principo neišsprendžiamas).

Šioje vietoje ataskaitos matematinę dalį būtų galima ir užbaigti. Projekto paraiškoje buvo kalbama apie COVID-19 pandemijos modelius, tų modelių solitoninius sprendinius ir jų valdymą. Nė žodžio nebuvo užsiminta apie prognozavimą. Visgi, jau vykdant projektą, kilo mintis pabandyti patyrinėti solitoniniais sprendiniais aprašomų procesų prognozuojamumą. Šiems klausimams skirtas trečiasis mūsų straipsnis [29]. Šiame straipsnyje nagrinėjome patį paprasčiausią solitono modelį (pirmos eilės kinko modelis) ir šį solitoną generuojančią Riccati diferencialinę lygtį (sistema (4) be multiplikatyvinių sąryšių). Tuo pačiu, dar praplėtėme modelio lygtis, įvesdami trupmeninės eilės išvestines, reprezentuojančias atminties-vėlinimo efektus. Gauti įdomūs teoriniai rezultatai, pagrindžiatys faktą, jog tiesmukiškas prognozavimo procesas gali būti nevienareikšmis. Tai, kurio solitoninio sprendinio šaka toliau vystysis procesas, priklauso nuo keletos faktorių, įskaitant ir tai, koku būdu vertinami praeities duomenys.

Trumpai aprašyti trečiajame straipsnyje [29] gautus rezultatus būtų ganėtinai sunku. Vien tik pradinių apibrėžimų skyrelyje (prieš Teoremų formuluotes ir įrodymus) straipsnyje pateikta 14 formuliu. Vėlgi, skaitytojo prašytume peržvelgti pridedamo straipsnio tekstą.

Baigiant ataskaitą, reiktų paminėti, kad pavyko per gana trumpą laiką išspręsti tris gana didelius teorinius uždavinius. Pirmiausia, sukurta solitoninių sprendinių konstravimo metodika meta-konkurenciniame modelyje grafo viršūnėse, kai sąryšiai briaunose realizuojami difuzinių sąryšių pagalba. Įrodytos būtinos ir pakankamos solitinių sprendinių egzistavimo teoremos, išvestos ir aprašytos tų solitoninių sprendinių savybės ir irodyta teorema apie didžiausią įmanomą solitoninio sprendinio eilės priklausomybę nuo grafo viršūnių skaičiaus. Antra, sukurta nauja solitoninių sprendinių stochastizacijos schema, užtikrinanti stochastinių solitoninių sprendinių reikšmių kitimo intervalų garantuotus apribojimus. Galiausiai, ištyrinėtos modelio savybės, atlikta atraktorių, fazinių stabilumo diagramų, bei solitoniniais sprendiniais aprašomų separatrišių analizė.

Baigiant ataskaitą, reiktų paminėti, kad pavyko per gana trumpą laiką išspręsti tris gana didelius teorinius uždavinius. Pirmiausia, sukurta solitoninių sprendinių konstravimo metodika meta-konkurenciniame modelyje grafo viršūnėse, kai sąryšiai briaunose realizuojami difuzinių sąryšių pagalba. Įrodytos būtinos ir pakankamos solitinių sprendinių egzistavimo teoremos, išvestos ir aprašytos tų solitoninių sprendinių savybės ir irodyta teorema apie didžiausią įmanomą solitoninio sprendinio eilės priklausomybę nuo grafo viršūnių skaičiaus. Antra, sukurta nauja solitoninių sprendinių stochastizacijos schema, užtikrinanti stochastinių solitoninių sprendinių reikšmių kitimo intervalų garantuotus apribojimus. Galiausiai, ištyrinėtos modelio savybės, atlikta atraktorių, fazinių stabilumo diagramų, bei solitoniniais sprendiniais aprašomų separatrišių analizė.

Siekiant plačiau paviešinti Projekto vykdymo rezultatus, trijų pateiktų straipsnių elektroninės versijos (pirmieji puslapiai) yra patalpinti į viešai prieinamą Projekto pagrindinio vykdytojo asmeninę svetainę (adresas [www.minvydasragulskis.com](http://www.minvydasragulskis.com)). Sukurta nauja nuoroda straipsnių klasifikavime pagal tyrimų tematiką: „Soliton solutions to COVID-19 pandemic models.“

Atsidarius šią nuorodą, randami trys laisvai prieinami pdf dokumentai. Beto, šiame tinklapyje pateikta ir ši projekto ataskaita Lietuvių kalba.

### **Ataskaitoje naudojamos literatūros sąrašas**

- [1] A. Scott (Ed.), *Encyclopedia of Nonlinear Science*, Routledge, New York, 2004.
- [2] Z. Navickas, L. Bikulciene, M. Rahula, M. Ragulskis, Algebraic operator method for the construction of solitary solutions to nonlinear differential equations, *Commun Nonlinear Sci Numer Simul* 18 (2013) 1374–1389.
- [3] H. W. Hethcote, P. Van den Driessche, Some epidemiological models with nonlinear incidence, *Journal of Mathematical Biology* 29 (3) (1991) 271–287.
- [4] M. M. Saito, S. Imoto, R. Yamaguchi, H. Sato, H. Nakada, M. Kami, S. Miyano, T. Higuchi, Extension and verification of the seir model on the 2009 influenza a (h1n1) pandemic in japan, *Mathematical biosciences* 246 (1) (2013) 47–54.
- [5] S. Annas, M. I. Pratama, M. Rifandi, W. Sanusi, S. Side, Stability analysis and numerical simulation of seir model for pandemic covid-19 spread in indonesia, *Chaos, Solitons & Fractals* 139 (2020) 110072.
- [6] O. Khyar, K. Allali, Global dynamics of a multi-strain seir epidemic model with general incidence rates: application to covid-19 pandemic, *Nonlinear Dynamics* (2020) 1–21.
- [7] Yamaleev, Robert M., Representation of solutions of n-order Riccati equation via generalized trigonometric functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 420.1 (2014) 334–347.
- [8] Zazoua A, et al. Analysis of mathematical model of prostate cancer with androgen deprivation therapy. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2019, vol.66, p.41-60.
- [9] T.C. Reluga, et al. Analysis of hepatitis C virus infection models with hepatocyte homeostasis. *SIAM J. Appl. Math.* 2009, vol.69, p.999–1023.
- [10] T.Telksnys, et al. Solitary solutions to an androgen-deprivation prostate cancer treatment model. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020, vol.43(7), p.3995-4006.
- [11] T.Telksnys, et al. Kink solitary solutions to a hepatitis C evolution model. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*. 2020, vol.25(11), p.4427-4447.
- [12] A.E.S.Almocera, et al. Stability analysis in COVID-19 within-host model with immune response. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2020. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105584>.
- [13] Z.Navickas et al. Existence of second order solitary solutions to Riccati differential equations coupled with a multiplicative term. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 2016, vol.81, p.1163–1190.
- [14] T.Nagatani. Migration difference in diffusively-coupled prey–predator system on heterogeneous graphs. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2020, vol.537, p.122705.
- [15] A. Rhodes, T. Hillen, A mathematical model for the immune-mediated theory of metastasis, *Journal of theoretical biology* 482 (2019) 109999.
- [16] I.Timofejeva, T.Telksnys, Z.Navickas, R.Marcinkevicius, M.Ragulskis. Higher order solitary solutions to the meta-model of diffusively coupled Lotka-Volterra systems. *Advances in Difference Equations* (submitted, Manuscript No. AIDE-D-20-01670).

- [17] A.D. Polyanin. Handbook of nonlinear partial differential equations. CRC Press, 2004.
- [18] J.H. He, et al. Exp-function method for nonlinear wave equations. Chaos, Solitons & Fractals. 2006, vol.30, p.700–708.
- [19] H.Zhang. Application of the  $(G'/G)$ -expansion method for the complex KdV equation. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010, vol.15, p.1700-1704.
- [20] Wazwaz, Abdul-Majid, The extended tanh method for new solitons solutions for many forms of the fifth-order KdV equations, Applied Mathematics and Computation 184.2 (2007) 1002-1014.
- [21] Z.Navickas, M.Ragulskis. How far one can go with the Exp function method? Applied Mathematics and Computations. ISSN 0096-3003, Elsevier. 2009, vol.211(2), p.522-530.
- [22] Z.Navickas, M.Ragulskis, L.Bikulciene. Be careful with the Exp-function method - additional remarks. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. ISSN 1007-5704, Elsevier. 2010, vol.15, p.3874-3886.
- [23] Z.Navickas, M.Ragulskis. Comments on "A new algorithm for automatic computation of solitary wave solutions to nonlinear partial differential equations based on the Exp-function method". Applied Mathematics and Computations. ISSN 0096-3003, Elsevier. 2014, vol.243, p.419-425.
- [24] T.Telksnys, Z.Navickas, R.Marcinkevicius, M.Ragulskis. Existence of solitary solutions in systems of PDEs with multiplicative polynomial coupling. Applied Mathematics and Computation. ISSN 0096-3003. Elsevier. 2018, vol.320, p.380-388.
- [25] D.Faranda, T.Alberti. Modeling the second wave of COVID-19 infections in France and Italy via a stochastic SEIR model. Chaos 30, 111101 (2020); <https://doi.org/10.1063/5.0015943>
- [26] Z.Navickas, I.Timofejeva, T.Telksnys, R.Marcinkevicius, M.Ragulskis. Construction of soliton solutions to the stochastized Riccati equation. Submitted to Open Mathematics.
- [27] A.P.Fedaravicius, Maosen Cao, M.Ragulskis. Control of a dendritic neuron driven by a phase-independent stimulation. Chaos, Solitons & Fractals. 2016, vol. 85, p.77-83.
- [28] T.Telksnys, Z.Navickas, I.Timofejeva, R.Marcinkevicius, M.Ragulskis. Symmetry breaking in solitary solutions to the Hodgkin-Huxley model. Nonlinear Dynamics. 2019, vol.97(1), p.571-582.
- [29] I.Timofejeva, Z. Navickas, T.Telksnys, R.Marcinkevicius, X.-J. Yang, M.Ragulskis. The extension of analytic solutions to FDEs to the negative half-line. AIMS Mathematics (accepted paper, Manuscript no. Math20201168).